**ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** | **មណ្ឌលប្រឡង**: ........................................
**សម័យប្រឡង** : ០៦ ធិន្នូ ២០២៣ | **លេខបន្ទប់** : ....................**លេខតុ**:...............
**វិញ្ញាសា** : **គណិតវិទ្យា ( ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ )** | **ហត្ថលេខាបេក្ខជន** : ..............................
**រយៈពេល** : **១៥០ នាទី** | **ឈ្មោះបេក្ខជន** : ........................................
**ពិន្ទុ** : **១២៥**

**ប្រធាន** :

I. (១០ ពិន្ទុ) គណនាលីមីត $a.\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ ដោយដឹងថា $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$

$b.\ \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2x}{2+2\sin x}$ ; $c.\ \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{27(\sqrt{x+6}-3)}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល ៖ $a.\ I=\int_0^3(x-1)(x+3)\,dx$ ; $b.\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}5\sin^4x\cos x\,dx$ ; $c.\ K=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\dfrac{3}{2x+1}\right)dx$

III. (១៥ ពិន្ទុ) ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចសមីការ : $z^2+4z+16=0$ ។ សរសេរចម្លើយទាំងពីរតាងដោយ $z_1$ និង $z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

IV. (១០ ពិន្ទុ) អ្នកលក់បន្ទាត់ម្នាក់គាត់មានបន្ទាត់ជ័រសំប៉ែតចំនួន 25 ដែលក្នុងនោះមានបន្ទាត់ 3 ដែលឆែបចុង ។ គេចាប់យកបន្ទាត់មួយក្នុងចំណោម 25 ដោយចៃដន្យ ។

1. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A : "បន្ទាត់ដែលចាប់បានមិនឆែបចុង"
2. អ្នកទិញគាត់ចាប់យកដោយមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ហើយគាត់ចង់បានដាច់ខាតបន្ទាត់ល្អចំនួន 7 តើគាត់ត្រូវទិញបន្ទាត់យ៉ាងតិចប៉ុន្មាន?
3. គេចាប់យកបន្ទាត់ 2 ម្តងដោយចៃដន្យក្នុងចំណោមបន្ទាត់ទាំង 25។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $B$ : "បន្ទាត់ទាំងពីរចាប់បានមិនឆែបចុង"

V. (២៥ពិន្ទុ) 1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(5;-5;2)$ , $B(-1;1;0)$ , $C(0;1;2)$ និង $D(6;6;-1)$ ។

a. បង្ហាញថាចំណុច $A,B,C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

b. បង្ហាញថាត្រីកោណ $BCD$ ជាត្រីកោណកែង និងរកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ ។

2. គេឱ្យសមីការ $12(xy+3)-(3x+2y)^2=0$

a. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប

b. ចូររកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។ សង់អេលីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ) a. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):3y"=9y-6y'$ ។

b. រកចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E)$ ដែល $y(0)=1$ និង $y'(1)=e$ ។ $(\ln e=1)$

VII. (៤០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=4-x-2e^{-x}$ ។ គេតាង $(C)$ ក្រាបរបស់ $f$ ។

A. 1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត$x$; $f(x)=\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ដឹងថា $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D)$ ដែលមានសមីការ $y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ ។

3. សិក្សាទីតាំងនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $(D)$ ។

B. 1. គណនា $f'(x)$ ដែល $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $f(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$ និងគណនាតម្លៃអតិបរមារបស់ $f$ ។

2. $A$ ជាចំណុចនៃ $(C)$ ដែលមានអាប់ស៊ីស $0$ ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T)$ ទៅនឹងក្រាប $(C)$ ត្រង់ចំណុច $A$ ។

3. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ $\beta$ នៅក្នុងចន្លោះ $[-1;0]$ ។

4. សង់បន្ទាត់ប៉ះ $(T)$ អាស៊ីមតូត $(D)$ និងក្រាប $(C)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

I. គណនាលីមីត

$a.\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ រាងមិនកំណត់ $0\times\infty$

តាង $X=\dfrac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{1}{X}$ ; ពេល $x\to+\infty$ នោះ $X\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{X\to0}\left[\dfrac{1}{X}\ln(1+X)\right]=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$

ដូចនេះ $\boxed{a.\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=1}$

$b.\ \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2x}{2+2\sin x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{2(1+\sin x)}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{2}=\frac{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-(-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{b.\ \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2x}{2+2\sin x}=1}$

$c.\ \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{27(\sqrt{x+6}-3)}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to3}\left[\frac{x^3-3^3}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}\times\frac{\sqrt{x+6}+3}{27}\right]=\lim_{x\to3}\left[\frac{x-3}{\sqrt{(x+6)^2-3^2}}\times\frac{(\sqrt{x+6}+3)(x^2+3x+9)}{27}\right]$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6}+3)(x^2+3x+9)}{27}=\frac{(\sqrt{3+6}+3)(3^2+9+9)}{27}=\frac{(3+3)\times27}{27}=6$$

ដូចនេះ $\boxed{c.\ \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{27(\sqrt{x+6}-3)}=6}$

II. គណនាអាំងតេក្រាល

$$a.\ I=\int_0^3(x-1)(x+3)\,dx=\int_0^3\left(x^2+2x-3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_0^3$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}+3^2-3\times3\right)-(0+0-0)=9+9-9=9$$

ដូចនេះ $\boxed{I=9}$

$$b.\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}5\sin^4x\cos x dx=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(\sin x)'\sin^4x\right]dx=\left[5\times\frac{\sin^5x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[\sin^5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^5-(\sin0)^5=1^5-0=1$$

ដូចនេះ $\boxed{J=1}$

$$c.\ K=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{3}{2x+1}\right)dx=\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{2}{2x+3}\right)dx=\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right]dx=\left[\frac{3}{2}\ln|2x+1|\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\frac{3}{2}[\ln(2+1)-\ln(1+1)]=\frac{3}{2}(\ln3-\ln2)=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{K=\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3}{2}}$

III. ដោះស្រាយសមីការ $z^2+4z+16=0$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

យើងមាន $z^2+4z+16=0$

$$z^2+2\times 2\times z+2^2=-12$$

$$(z+2)^2=\left(\sqrt{12}i\right)^2$$

នាំឱ្យ $\left[\begin{array}{l} z+2=\sqrt{12}i \\ z+2=-\sqrt{12}i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2+2\sqrt{3}i \\ z=-2-2\sqrt{3}i \end{array}\right.$

យក $z_1=-2-2\sqrt{3}i$ និង $z_2=-2+2\sqrt{3}i$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយទាំងពីររបស់សមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចគឺ } z_1=-2-2\sqrt{3}i \text{ និង } z_2=-2+2\sqrt{3}i}$

- សរសេរ $z_1$ និង $z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1=-2-2\sqrt{3}i=4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z_2=-2+2\sqrt{3}i=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \text{ និង } z_2=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

IV. ប្រូបាប

1. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A$ "បន្ទាត់ដែលចាប់បានមិនឆែបចុង"

បន្ទាត់សរុបមាន 25 ក្នុងនោះមានបន្ទាត់ឆែបចុង 3 ហើយគេចាប់យកបន្ទាត់មួយដោយចៃដន្យ

ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(25,1)=25$ ករណី

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(22,1)=22$ ករណី

តាមរូបមន្ត $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ នាំឱ្យ $P(A)=\frac{22}{25}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{22}{25}}$

2. រកចំនួនបន្ទាត់តិចបំផុតដែលអ្នកទិញត្រូវទិញដើម្បីទទួលបានដាច់ខាតនូវបន្ទាត់ល្អចំនួន 7

ព្រឹត្តិការណ៍មួយកើតឡើងដាច់ខាតកាលណា ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នោះមានតម្លៃស្មើ 1

បើអ្នកទិញ ទិញបន្ទាត់ចាប់ពី 10 ឡើងទៅនោះប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ទិញបានបន្ទាត់ល្អ 7 មានតម្លៃស្មើ 1

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដើម្បីបានដាច់ខាតនូវបន្ទាត់ល្អចំនួន 7 អ្នកទិញត្រូវទិញបន្ទាត់តិចបំផុតចំនួន 10}}$

3. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $B$ : "បន្ទាត់ទាំងពីរចាប់បានមិនឆែបចុង"

បន្ទាត់សរុបមាន 25 ក្នុងនោះមានបន្ទាត់ឆែបចុង 3 ហើយគេចាប់យកបន្ទាត់ 2 ម្តងដោយចៃដន្យ

ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(25,2)=\frac{25!}{(25-2)!2!}=\frac{23!\times 24\times 25}{23!\times 1\times 2}=12\times 25=300$ ករណី

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(22,2)=\frac{22!}{(22-2)!2!}=\frac{20!\times 21\times 22}{20!\times 1\times 2}=21\times 11=231$ ករណី

តាមរូបមន្ត $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$ នាំឱ្យ $P(B)=\frac{231}{300}=\frac{7\times 3\times 11}{4\times 3\times 25}=\frac{77}{100}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{77}{100}}$

V. 1. a. បង្ហាញថា $A, B, C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

យើងមាន $A(5;-5;2)$ , $B(-1;1;0)$ , $C(0;1;2)$ និង $D(6;6;-1)$

ចំណុច $A, B, C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយកាលណា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (-1-5;1+5;0-2) = (-6;6;-2)$ និង $\overrightarrow{AC} = (0-5;1+5;2-2) = (-5;6;0)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 6 & -2 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} \vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0+12)\vec{i} - (0-10)\vec{j} + (-36+30)\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 12\vec{i} + 10\vec{j} - 6\vec{k} \neq \vec{0}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនុច } A, B, C \text{ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ត្រូវបានបង្ហាញ}}$

b. បង្ហាញថា $BCD$ ជាត្រីកោណកែង

$\overrightarrow{BC} = (0+1, 1-1, 2-0) = (1,0,2)$ នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$ ឯកតាប្រវែង

$\overrightarrow{BD} = (6+1, 6-1, -1-0) = (7,5,-1)$ នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{7^2+5^2+(-1)^2} = \sqrt{75}$ ឯកតាប្រវែង

$\overrightarrow{CD} = (6-0, 6-1, -1-2) = (6,5,-3)$ នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{6^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{70}$ ឯកតាប្រវែង

ដោយ $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{70}^2 = 75 \quad (1)$

$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \sqrt{75}^2 = 75 \ (2)$

តាម $(1)$ និង $(2)$ នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BD}\right|^2$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $BCD$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ $C$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ត្រីកោណ } BCD \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រូវបានបង្ហាញ}}$

- គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $BCD$

ដោយ $BCD$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ $C$ នោះ $S_{BCD} = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\right| \times \left|\overrightarrow{CD}\right|}{2}$

$S_{BCD} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{70}}{2} = \dfrac{\sqrt{5^2 \times 14}}{2} = \dfrac{5\sqrt{14}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ } BDC \text{ គឺ } S_{BCD} = \dfrac{5\sqrt{14}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

+ របៀបទី២

$\overrightarrow{BC} = (0+1, 1-1, 2-0) = (1,0,2)$ និង $\overrightarrow{CD} = (6-0, 6-1, -1-2) = (6,5,-3)$

ត្រីកោណ $BCD$ ជាត្រីកោណកែងកាលណាវាមានមុំកែងមួយ

ដោយ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = (1)(6) + (0)(5) + (2)(-3) = 6+0-6 = 0$ នោះ $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}$

នាំឱ្យ ត្រីកោណ $BCD$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ $C$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ត្រីកោណ } BCD \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រូវបានបង្ហាញ}}$

- គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $BCD$

តាមរូបមន្ត $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \vec{k}$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CD}=(0-10)\,\vec{i}-(-3-12)\,\vec{j}+(5-0)\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CD}=-10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$$

នាំឱ្យ $S_{BCD}=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+15^2+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\left(2^2+3^2+1^2\right)}=\frac{5\sqrt{4+9+1}}{2}=\frac{5\sqrt{14}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ } BDC \text{ គឺ } S_{BCD}=\frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

2. យើងមានសមីការ $12\,(xy+3)-(3x+2y)^2=0$

a. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប

យើងមាន $12\,(xy+3)-(3x+2y)^2=0$

$$12xy+36-\left(9x^2+12xy+4y^2\right)=0$$
$$12xy+36-9x^2-12xy-4y^2=0$$
$$9x^2+4y^2=36$$
$$\frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ មានរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ជាសមីការអេលីបដែលមានផ្ចិតត្រង់គល់តម្រុយ និងអ័ក្សធំឈរ

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការ } 12\,(xy+3)-(3x+2y)^2=0 \text{ ជាសមីការអេលីបត្រូវបានបង្ហាញ}}$

b. រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងកំពូលទាំងពីរនៃអេលីប

យើងមានអេលីប $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ មានរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ នាំឱ្យ $a=3;b=2$

អេលីបនេះ មានផ្ចិតត្រង់គល់តម្រុយ និងមានអ័ក្សធំឈរ

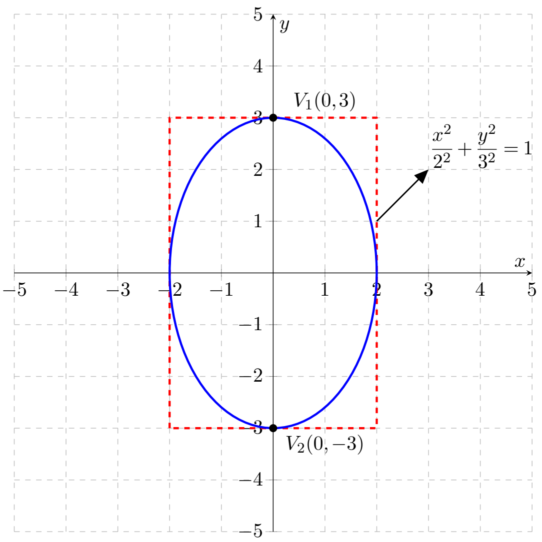
គេបាន ប្រវែងអ័ក្សធំ គឺ $2a=2\times 3=6$ ឯកតាប្រវែង

ប្រវែងអ័ក្សតូច គឺ $2b=2\times 2=4$ ឯកតាប្រវែង

កំពូលទាំងពីរ គឺ $\begin{cases} V_1\,(0,a) \\ V_2\,(0,-a)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1\,(0,3) \\ V_2\,(0,-3)\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អេលីបនេះមាន } 2a=6 \text{ ឯកតាប្រវែង , } 2b=4 \text{ ឯកតាប្រវែង និងកំពូល } V_1\,(0,3)\,,V_2\,(0,-3)}$

- សង់អេលីប



VI. a. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E)$

យើងមាន $(E): 3y'' = 9y - 6y'$ អាចសរសេរបាន $y'' + 2y' - 3y = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ មានរាង $a + b + c = 0$ នាំឱ្យ $\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \end{array}\right.$

ចម្លើយទូទៅរបស់ $(E)$ មានរាង $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, A, B \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $y = Ae^{x} + Be^{-3x}, A, B \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការ } (E) \text{ មានចម្លើយទូទៅ } y = Ae^{x} + Be^{-3x}, A, B \in \mathbb{R}}$

b. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ $(E)$ ដែល $y(0) = 1, y'(1) = e$

$(E)$ មានចម្លើយទូទៅ $y = Ae^{x} + Be^{-3x}$ នាំឱ្យ $y' = Ae^{x} - 3Be^{-3x}$

ដោយ $\left\{\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(1) = e \end{array}\right.$ នាំឱ្យ $\left\{\begin{array}{l} Ae^0 + Be^0 = 1 \\ Ae^1 - 3Be^{-3} = e \end{array}\right.$ នាំឱ្យ $\left\{\begin{array}{ll} A + B = 1 & (1) \\ A - 3e^{-4}B = 1 & (2) \end{array}\right.$

យក $(1) - (2)$ គេបាន $(1 + 3e^{-4})B = 0$ នាំឱ្យ $B = 0$

តាម $(1): A + 0 = 1$ នាំឱ្យ $A = 1$

នាំឱ្យ ចម្លើយពិសេសមួយនៃ $(E)$ គឺ $y = e^x$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយពិសេសមួយនៃ } (E) \text{ ដែល } y(0) = 1, y'(1) = e \text{ គឺ } y = e^x}$

VII. យើងមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ មានក្រាប $(C)$

A. 1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\forall x; f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

យើងមាន $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ កំណត់គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 4 - x - \frac{2}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x} - \frac{xe^x}{e^x} - \frac{2}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គ្រប់ } x \in \mathbb{R}; f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} \text{ ពិត}}$

- គណនា $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(4 - x - \dfrac{2}{e^x}\right) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{2}{e^x}\right) = 0$ )

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[e^{-x}(4e^x - xe^x - 2)\right] = -\infty$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x \to -\infty} (4e^x - xe^x - 2) = -2$ និង $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$)

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2. បង្ហាញថា $(D): y = -x + 4$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប $(C)$

បន្ទាត់ $(D): y = -x + 4$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(C)$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = 0$

ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2e^{-x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{2}{e^x}\right) = 0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } (D): y = -x + 4 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប } (C) \text{ ត្រូវបានបង្ហាញ}}$

3. សិក្សាទីតាំងនៃ $(C)$ ធៀបនឹង $(D)$

យក $y_c - y_D = f(x) - (-x+4) = -\dfrac{2}{e^x} < 0$ គ្រប់តម្លៃ $x$ នោះក្រាប $(C)$ នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $(D)$ ជានិច្ច ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ ក្រាប $(C)$ នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ $(D)$ ជានិច្ច ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

B. 1. គណនា $f'(x)$ ដែល $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $f(x)$

$f'(x) = (4 - x - 2e^{-x})'$

$f'(x) = 0 - 1 - 2(-x)'e^{-x}$

$f'(x) = 2e^{-x} - 1 = \dfrac{2}{e^x} - \dfrac{e^x}{e^x} = \dfrac{2-e^x}{e^x}$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃ $f(x)$ គឺ $f'(x) = \dfrac{2-e^x}{e^x}$

- សិក្សាអថេរភាពនៃ $f$

យើងមាន $f'(x) = \dfrac{2-e^x}{e^x}$

ដោយ $e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x$ នោះ $f'(x)$ ត្រូវយកសញ្ញាតាម $2 - e^x$

បើ $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2 - e^x = 0 \Longleftrightarrow e^x = 2 \Longrightarrow x = \ln 2$

បើ $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 2 - e^x < 0 \Longleftrightarrow e^x > 2 \Longrightarrow x > \ln 2$

បើ $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2 - e^x > 0 \Longleftrightarrow e^x < 2 \Longrightarrow x < \ln 2$

តារាងសញ្ញារបស់ $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

តាមតារាងសញ្ញារបស់ $f'(x)$ គេទាញបានទិសដៅអថេរភាពនៃ $f$ គឺ

+ អនុគម៍ $f$ កើន ចំពោះ $x \in (-\infty, \ln 2)$

+ អនុគមន៍ $f$ ថេរ ចំពោះ $x = \ln 2$

+ អនុគមន៍ $f$ ចុះ ចំពោះ $x \in (\ln 2, +\infty)$

- គណនាតម្លៃអតិបរមាធៀបនៃ $f$

អនុគមន៍ $f$ មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = \ln 2$ ដែល $f(\ln 2) = 4 - \ln 2 - \dfrac{2}{e^{\ln 2}} = 4 - 0.7 - 1 = 2.3$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាធៀបនៃ $f$ គឺ $f(\ln 2) = 2.3$

- តារាងអថេរភាពនៃ $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2.3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

2. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T)$ ដែលប៉ះ $(C)$ ត្រង់ $A$ ដែលមានអាប់ស៊ីស $0$

តាមរូបមន្ត $(T): y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$

ដោយ $x_A = 0$ នាំឱ្យ $f'(x_A) = f'(0) = \dfrac{2-e^0}{e^0} = \dfrac{2-1}{1} = 1$ និង $f(x_A) = f(0) = 4 - 0 - 2e^0 = 2$

នាំឱ្យ $(T): y=(x-0)+2=x+2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះ } (T) \text{ គឺ } (T): y=x+2}$

3. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស $\beta$ តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$

យើងមាន $f(x)=4-x-2e^{-x}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$

នាំឱ្យ $f(-1)=4+1-2e^{-(-1)}=5-2e=5-5.44=-0.44$

$f(0)=4-0-2e^{0}=2$

នាំឱ្យ $f(-1)\times f(0)=-0.88<0 \quad (1)$

តាមតារាងអថេរភាពនៃ $f$ គេដឹងថា $f$ កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $[-1,0] \quad (2)$

តាម (1) និង (2) តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល គេទាញបានថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស $\beta$ តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$

ហើយខ្សែកោង $(C)$ កាត់អ័ក្ស $(ox)$ តែមួយកន្លែងគត់ក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការ } f(x)=0 \text{ មានឫស } \beta \text{ តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ } [-1,0] \text{ ត្រូវបានបង្ហាញ}}$

4. សង់បន្ទាត់ប៉ះ $(T)$ អាស៊ីមតូត $(D)$ និងក្រាប $(C)$